

# Autour de la décomposition dyadique

Claire David

25 février 2013

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6  
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598  
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

On rappelle qu'un nombre dyadique est une fraction rationnelle de la forme  $\frac{1}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Considérons maintenant l'ensemble des rationnels dyadiques, i.e. de la forme  $\frac{k}{2^n}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Une propriété remarquable de l'ensemble des rationnels dyadiques est sa densité dans  $\mathbb{R}$  :

tout nombre réel est donc limite d'une suite de nombres rationnels dyadiques. Ainsi, tout réel  $r$  peut être approché à  $\frac{1}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , par ses valeurs approchées dyadiques par défaut et par excès ; comme

$$E(2^n r) - 1 < E(2^n r) \leq 2^n r < E(2^n r) + 1 \quad (1)$$

on obtient en effet :

$$\frac{1}{2^n} E(2^n r) - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} E(2^n r) \leq r < \frac{1}{2^n} E(2^n r) + \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

On rappelle aussi que tout réel  $r$  de l'intervalle  $[0, 1[$  admet un développement en base 2 de la forme :

$$r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \quad , \quad r_n \in \{0, 1\} \quad (3)$$

L'intérêt d'une décomposition en base 2, qui est binaire - des 0 et des 1 - est la facilité d'application à des calculs numériques - l'ordinateur ne faisant que du binaire. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, qui est une des motivations de la théorie des ondelettes.

Considérons maintenant l'espace  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ .

La topologie de  $\mathbb{R}^d$  fait, naturellement, appel à la boule unité  $\mathcal{B}(0, 1)$ , qui permet facilement de se « repérer » dans  $\mathbb{R}^d$  : il y a les éléments situés à l'intérieur de cette boule, et les autres.

Utilisons, maintenant, les nombres dyadiques pour cette topologie. Pour commencer, considérons les valeurs approchées dyadiques de 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{2^n} E(2^n r) - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} E(2^n r) \leq r < \frac{1}{2^n} E(2^n r) + \frac{1}{2^n} \quad (4)$$

et, en particulier, pour  $n = 2$  :

$$\frac{1}{2^2} E(2^2) - \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^2} E(2^2) \leq 1 < \frac{1}{2^2} E(2^2) + \frac{1}{2^2} \quad (5)$$

et donc, bien évidemment :

$$1 - \frac{1}{2^2} \leq 1 < 1 + \frac{1}{2^2} \quad (6)$$

puis :

$$\frac{3}{4} \leq 1 \quad (7)$$

ce qui conduit à considérer non plus la boule unité, mais la boule  $\mathcal{B}(O; \frac{3}{4})$ .

Cherchons maintenant à obtenir un recouvrement de  $\mathbb{R}^d$  par des couronnes « dyadiques », centrées en  $O$ , dont le rayon intérieur tende vers zéro, et sur lesquelles on puisse définir des distributions à supports disjoints. Il est naturel, pour la première couronne, de choisir  $\frac{3}{4}$  comme rayon intérieur. Tout élément  $x$  de cette couronne sera donc tel que :

$$\|x\| \geq \frac{3}{4} \quad (8)$$

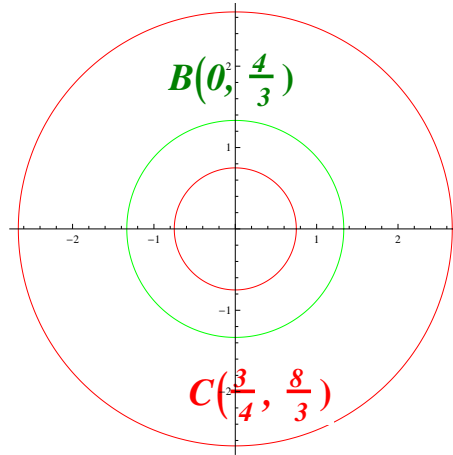
L'idée du recouvrement et des « supports à disjoindre » conduit alors à considérer, en même temps, les éléments  $x'$  tels que :

$$\|x'\| \leq \frac{3}{4} \quad (9)$$

soit :

$$\frac{1}{\|x'\|} \geq \frac{4}{3} \quad (10)$$

et, par là-même, la boule  $\mathcal{B}(O; \frac{4}{3})$ .



**La boule  $\mathcal{B}(O; \frac{4}{3})$  et la couronne  $\mathcal{C}(O; \frac{3}{4}, \frac{8}{3})$**

Pour tout réel positif  $r$ , il existe un entier naturel  $n_r$  tel que :

$$2^{n_r+2} \leq 3r \leq 2^{n_r+3} \quad (11)$$

et donc :

$$2^{n_r} \frac{4}{3} \leq r \leq 2^{n_r} \frac{8}{3} \quad (12)$$

puis :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{r}{2^{n_j}} \leq \frac{8}{3} \quad (13)$$

Ainsi, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^d$ , il existe un entier  $n_x$  tel que :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{\|x\|}{2^{n_x}} \leq \frac{8}{3} \quad (14)$$

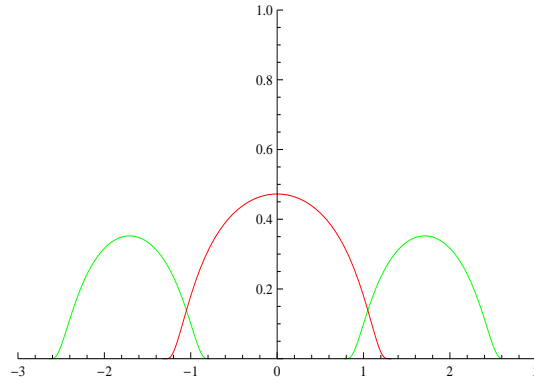
ce qui signifie que  $\frac{x}{2^{n_x}}$  appartient à la couronne  $\mathcal{C}\left(O; \frac{3}{4}; \frac{8}{3}\right)$ .

$x$  appartient donc à la couronne  $\mathcal{C}\left(O; 2^{n_x} \frac{3}{4}; 2^{n_x} \frac{8}{3}\right)$ .

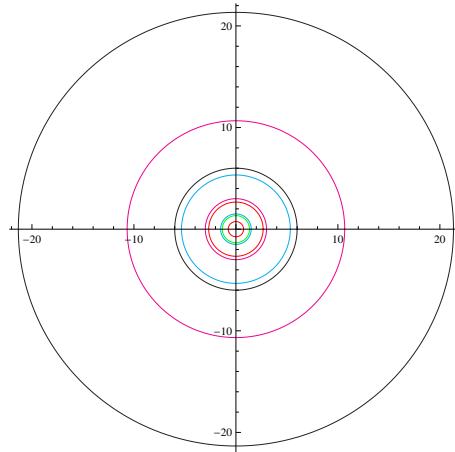
Tout élément de  $\mathbb{R}^d$  peut donc être « localisé » dans une couronne de la forme  $\mathcal{C}\left(O; 2^n \frac{3}{4}; 2^n \frac{8}{3}\right)$ .

Cela amène alors naturellement à la décomposition dyadique de l'unité [1] : il existe deux fonctions radiales  $\chi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{B}\left(O; \frac{4}{3}\right)\right)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{C}\left(O; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)\right)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , telles que, pour tout  $\xi$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$\chi(x) + \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1 \quad (15)$$



Les fonctions  $\varphi$  et  $\chi$ .



Les couronnes

# 1 Application à la théorie des profils

L'idée est la suivante : montrer que la solution des équations de Navier-Stokes se décompose sous forme « dyadique » de la façon suivante :

i. Dans le cas de « non-explosion » :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \mathcal{NS} \left( \gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \right) (x, t) \quad , \quad n \in N^* \quad (16)$$

où  $\sigma$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2\}$  :

$\forall i \in \{1, 2\}$  :

$$\sigma(i) \in \{1, 2\} \quad (17)$$

et où, pour tout entier  $n$  de  $\{1, \dots, N\}$ ,  $n \leq N$ , et tout  $i$  de  $\{1, 2\}$ ,  $\sigma^k(i)$  désigne l'itérée  $k^{\text{ème}}$  de  $\sigma(i)$ .

$\mathcal{NS} \left( \gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \right)$  désigne la solution de l'équation de Navier-Stokes associée au profil  $\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}$ , et

$$\frac{1}{\lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}} \Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \mathcal{NS} \left( \gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \right) (x, t) = \left( \frac{t}{\lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}^2}, \frac{x - x \lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}}{\lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}} \right) \quad (18)$$

Pour alléger les écritures, on notera désormais :

$$\gamma_{i, \sigma^n(i)} \quad (19)$$

pour

$$\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \quad (20)$$

et

$$\Lambda_{i, \sigma^n(i)} \quad (21)$$

pour

$$\Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \quad (22)$$

Les profils intervenant dans cette décomposition sont définis de façon récursive et orthogonale, par :

$$\gamma_1 \in \mathcal{B}(0, 1) \quad , \quad \gamma_2 \in \mathcal{C}_1 \quad (23)$$

où  $\mathcal{C}_1$  est la couronne dyadique  $\mathcal{C} \left( O; \frac{r_{int}}{2}; 2 r_{ext} \right)$ , puis :

$$\gamma_{1,1} \in \mathcal{B}(0, 1) + \quad , \quad \gamma_{1,2} \in \mathcal{C}_1 + \quad (24)$$

ii. Dans le cas de l'« explosion », la solution présente une structure « fractale », de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \Lambda_{i, \sigma^\infty(i)} \mathcal{NS} \left( \gamma_{i, \sigma^\infty(i)} \right) (x, t) \quad (25)$$

avec des notations analogues à celle du i. :

$$\gamma_{i,\sigma^\infty(i)} \tag{26}$$

pour

$$\gamma_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^\infty(i)} \tag{27}$$

et :

$$\Lambda_{i,\sigma^\infty(i)} \tag{28}$$

pour

$$\Lambda_{i,\sigma(i),\dots,\sigma^\infty(i)} \tag{29}$$

**Définition 1.1. Sous-profils (faibles)**

On appelle *sous-profil (faible)* un champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \tilde{\gamma}(x)$  auquel on puisse, par construction, associer un profil  $\gamma$ , un cœur  $x$ , et une échelle  $\lambda$ , tels que, grâce aux propriétés d'invariance par changement d'échelle :

$$\|\tilde{\gamma}\| = \|\gamma\| \quad (30)$$

**Définition 1.2. Sous-profils (forts)**

On appelle *sous-profil (fort)* un champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \tilde{\gamma}(x)$  auquel on puisse, par construction, associer une famille de profils  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , une famille de cœurs  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , et une famille d'échelles  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , vérifiant les conditions d'orthogonalité :

$$j \neq j' \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} + \frac{\lambda_{j'}}{\lambda_j} \right) = +\infty \\ \text{ou} \\ \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_j - x_{j'}|}{\lambda_j} = +\infty \end{cases} \quad (31)$$

**Définition 1.3. Voisinage extérieur d'une boule**

On appellera voisinage extérieur d'ordre  $\varepsilon > 0$  d'une boule  $\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, r_{\mathcal{B}})$ , de centre  $x_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^d$ , de rayon  $r_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^*$ , l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, r_{\mathcal{B}})} + \varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{B}(x_{\mathcal{B}}, r_{\mathcal{B}})} \quad , \quad r_{\mathcal{B}} < |x - x_{\mathcal{B}}| < r_{\mathcal{B}} + \varepsilon \right\} \quad (32)$$

**Définition 1.4. Voisinage extérieur d'une couronne**

On appellera *voisinage extérieur d'ordre  $\varepsilon > 0$*  d'une couronne  $\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})$ , de centre  $x_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^d$ , de rayon intérieur  $r_{\mathcal{C}}^{int} \in \mathbb{R}^*$ , de rayon extérieur  $r_{\mathcal{C}}^{ext} \in \mathbb{R}^*$ , l'ensemble

$$\overline{\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})} + \varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})} \quad , \quad r_{\mathcal{C}}^{ext} < |x - x_{\mathcal{C}}| < r_{\mathcal{C}}^{ext} + \varepsilon \right\} \quad (33)$$

**Définition 1.5. Largeur d'une couronne**

On appellera *largeur* d'une couronne  $\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})$ , de centre  $x_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^d$ , de rayon intérieur  $r_{\mathcal{C}}^{int} \in \mathbb{R}^*$ , de rayon extérieur  $r_{\mathcal{C}}^{ext} \in \mathbb{R}^*$ , le réel positif

$$r_{\mathcal{C}}^{ext} - r_{\mathcal{C}}^{int} \quad (34)$$

Dans un premier temps, montrons que tout champ de vecteurs de l'espace  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 3$ ),  $x \mapsto v(x)$ , donnée initiale de l'équation de  $\mathcal{NS}$ , est la somme d'une série de sous-profils  $\tilde{\gamma}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . On cherche à en déduire la densité de « l'espace des profils » dans  $\mathbb{R}^d$ , ce qui revient finalement à « orthogonaliser » la famille de sous-profils.

Grâce à la décomposition dyadique, on écrit, dans un premier temps, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$v(x) = v(x) \chi(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right) \quad (35)$$

où  $\chi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{B}\left(0, \frac{4}{3}\right)\right)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{C}\left(0; \frac{3}{4}, \frac{8}{3}\right)\right)$

On notera, dans ce qui suit,  $\mathcal{B}_u = \mathcal{B}\left(0, \frac{4}{3}\right)$ , qui est donc notre « boule unité », et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\mathcal{C}_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^d / \frac{3}{4} \leq \left\| \frac{x}{2^j} \right\| \leq \frac{8}{3} \right\} \quad (36)$$

(Je n'exclus pas de renormaliser et considérer la boule unité et des couronnes plus « naturelles ».)

On notera, dans ce qui suit,  $r_u$  le rayon de la boule unité.

Grâce au recouvrement de  $\mathbb{R}^d$  par la boule  $\mathcal{B}_u$  et les couronnes dyadiques  $\mathcal{C}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , on a donc une « décomposition dyadique en champs de vecteurs » du champ de vecteurs  $v$ .

Dans un premier temps, on suppose que le champ de vecteurs  $v$  est  $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . La décomposition infinie en sous-profils faibles est donc, finalement, une somme finie.

La première possibilité est, tout simplement, d'associer à chaque sous-profil (faible)  $x \mapsto v(x) \chi(x)$  ou  $x \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$  un profil  $\gamma_j$  auquel on associe un cœur dans la boule unité pour le sous-profil faible  $x \mapsto v(x) \chi(x)$ , et dans la couronne  $\mathcal{C}_j$  pour chacun des sous-profils faibles  $x \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$ .

Afin que les conditions d'orthogonalité de la famille de profils ainsi obtenue soient respectées, on leur associe, comme échelles, 1 pour le profil associé au sous-profil faible  $x \mapsto v(x) \chi(x)$ , et  $\lambda_j$  pour chacun des profils respectivement associés aux sous-profils faibles  $x \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$ , où la suite  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est telle que :

$$\lambda_0 = 1 \quad , \quad \lambda_{j+1} = \frac{\lambda_j}{2^{N+j}} \quad (37)$$

où  $N$  est un entier choisi  $\gg 1$ .

La famille de profils ainsi construite vérifie bien les conditions d'orthogonalité attendues.

La question est alors la suivante : que représente la somme de la série de profils ainsi obtenue ?

Grâce aux conditions d'orthogonalité et d'invariance par changement d'échelle, la solution de  $\mathcal{NS}$  obtenue par la somme de cette série de profils est globale.

Evidemment, on veut montrer que la somme de cette série de profils est égale au champ de vecteurs  $v$  initial.

L'extrême avantage de cette décomposition serait, aussi, à partir d'un champ de vecteurs donnée initiale de  $\mathcal{NS}$ , d'obtenir directement la forme des profils qui nous intéressent, car, a priori, hormis le fait qu'ils vérifient des conditions d'orthogonalité et génèrent des solutions de  $\mathcal{NS}$  vérifiant aussi un certain nombre de conditions, on ne sait pas grand chose d'eux ...

A cet effet, la seule solution pour le démontrer semble être d'utiliser une décomposition des sous-profils (version forte) en profils. Là, chaque sous-profil (faible)  $\tilde{\gamma}_j$  génère un nombre  $N_j$  de profils. Il faudrait pouvoir montrer que, pour tout  $j$ ,  $N_j = 1$ , ce qui serait en cohérence avec la « décomposition naturelle », grâce aux sous-profils (version faible), obtenue ci-dessus.

Pour le démontrer, un raisonnement par l'absurde semblerait le plus approprié.

Au champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \chi(x)$ , on associe donc la décomposition en profils

$$v(x) \chi(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{\lambda_{i,0}} \varphi^{i,0} \left( \frac{x - x_{i,0}}{\lambda_{i,0}} \right) + \psi^{N_0}(x) \quad (38)$$

où, pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, N_0\}$ ,  $x_{i,0} \in \mathcal{B}_u$ ,  $\lambda_{1,0} = 1$ , et, pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, N_0 - 1\}$ ,  $\lambda_{i+1,0} = \frac{\lambda_{i,0}}{2^{N+i}}$ ,  $N \in \mathbb{N} \gg 1$ , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité soient vérifiées. Le sous-profil  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \chi(x)$  se décompose donc en somme de  $N_0$  profils, modulo un reste  $\psi^{N_0}$ .

De façon très intéressante, il est à noter que, du fait de la présence de la fonction indicatrice  $x \mapsto \chi(x)$ , qui est identiquement nulle en dehors de la boule unité, la décomposition en profils ainsi obtenue sera telle que le reste  $\psi^{N_0}$  sera identiquement nul en dehors de cette même boule unité; d'autre part, le profil  $x \mapsto \frac{1}{\lambda_{i,0}} \varphi^{i,0} \left( \frac{x - x_{i,0}}{\lambda_{i,0}} \right)$  ne sera non identiquement nul que si :

$$\left\| \frac{x - x_{i,0}}{\lambda_{i,0}} \right\| \leq r_u \quad (39)$$

soit :

$$\|x - x_{i,0}\| \leq \lambda_{i,0} r_u \quad (40)$$

ce qui revient à se placer sur une couronne centrée en  $x_{i,0}$ , de largeur  $\lambda_{i,0} r_u$ .

$x_{i,0}$  étant donné, il existe donc une unique couronne du recouvrement considéré qui contienne l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^d$  vérifiant cete dernière condition.

Il faut, ensuite, déterminer une décomposition du deuxième sous-profil

$x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \varphi \left( \frac{x}{2^1} \right)$  en somme de  $N_1$  profils  $x \mapsto \frac{i}{\lambda_{i,1}} \varphi^{i,1} \left( \frac{x - x_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \right)$ , modulo un reste  $\psi^{N_1}$ , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité avec les  $N_0$  premiers profils soient vérifiées : on choisit de considérer un premier cœur  $x_{1,1}$  situé dans un voisinage extérieur d'ordre  $\frac{1}{2^N}$  de la forme  $\overline{\mathcal{B}_u} + \frac{1}{2^N}$  de  $\overline{\mathcal{B}_u}$ , des échelles  $\lambda_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, N_1$ , telles que  $\lambda_{1,1} = 1$ , et, pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, N_1 - 1\}$ ,  $\lambda_{i+1,1} = \frac{\lambda_{i,1}}{2^{N+i}}$ , où  $N \in \mathbb{N} \gg 1$  est l'entier introduit plus haut.

De même que précédemment, du fait de la présence de la fonction  $x \mapsto \varphi \left( \frac{x}{2^1} \right)$ , qui est identiquement nulle en dehors de la couronne  $\mathcal{C}_1$ , la décomposition en profils ainsi obtenue sera telle que le reste  $\psi^{N_1}$  sera identiquement nul en dehors de cette même couronne; d'autre part, le profil  $x \mapsto \frac{1}{\lambda_{i,10}} \varphi^{i,1} \left( \frac{x - x_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \right)$  ne sera non identiquement nul que si :

$$\frac{3}{4} \leq \left\| \frac{x - x_{i,1}}{2 \lambda_{i,1}} \right\| \leq \frac{8}{3} \quad (41)$$

soit :

$$\frac{3 \times 2 \lambda_{i,1}}{4} \leq \|x - x_{i,1}\| \leq \frac{8 \times 2 \lambda_{i,1}}{3} \quad (42)$$

ce qui revient à se placer sur une couronne centrée en  $x_{i,1}$ , de rayon intérieur  $\frac{3 \times 2 \lambda_{i,1}}{4}$ , et de rayon extérieur  $\frac{8 \times 2 \lambda_{i,1}}{3}$ .



On construit alors la décomposition du troisième sous-profil  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^2}\right)$  en somme de  $N_2$  profils  $x \mapsto \frac{1}{\lambda_{i,2}} \varphi^{i,2} 2\left(\frac{x - x_{i,2}}{\lambda_{i,2}}\right)$ , modulo un reste  $\psi_{N_2}$ , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité avec les premiers profils soient vérifiées : on choisit de considérer des cœurs  $x_{i,2}$ ,  $i = 1, \dots, N_2$ , situés dans un voisinage extérieur de la forme  $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_1 + \frac{1}{2^N}$  de  $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_1$ , des échelles  $\lambda_{1,2} = 1$  et, pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, N_2 - 1\}$ ,  $\lambda_{i+1,2} = \frac{\lambda_{i,2}}{2^{N+i}}$ , où  $N \in \mathbb{N} \gg 1$  est l'entier introduit plus haut.

De proche en proche, par récurrence, on obtient ainsi une suite de profils  $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ , et une suite de restes  $(\psi^{N_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , conduisant à la décomposition dyadique suivante, pour tout  $x$  de l'espace  $\mathbb{R}^d$  :

$$v(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left( \frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right) + \psi_i(x) \right\} \quad (43)$$

où, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{2,n} = 2^N \lambda_{1,n-1} \quad (44)$$

avec  $x_{i,n}$  situé dans un voisinage extérieur de la forme  $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_n + \frac{1}{\lambda_{i,n}}$  de  $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_n$ .

Il reste à montrer :

$\rightsquigarrow$  la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left( \frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right)$ , et la convergence de la somme des restes  $\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)$  vers 0 ; a priori, cette convergence est assurée par le fait que chaque reste  $\psi_i$  n'est non identiquement nul que sur une des composantes du recouvrement dyadique de l'espace. Ainsi, tout  $x$  de l'espace  $\mathbb{R}^d$  pouvant être « localisé » soit dans la boule unité, soit dans l'une des couronnes dyadiques  $\mathcal{C}_{i_x}$ , il en résulte, dans le cas où  $x$  est localisé dans la couronne  $\mathcal{C}_{i_x}$  :

$$\begin{aligned} \left\| v(x) - \sum_{i=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left( \frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right) + \psi_i(x) \right\} \right\| &= \left\| v(x) - \left\{ \sum_{i=1}^{N_{i_x}} \frac{1}{\lambda_{i_x,n}} \varphi^n \left( \frac{x - x_{i_x,n}}{\lambda_{i_x,n}} \right) + \psi_{i_x}(x) \right\} \right\| \\ &\leq \left\| v(x) - \sum_{i=1}^{N_{i_x}} \frac{1}{\lambda_{i_x,n}} \varphi^n \left( \frac{x - x_{i_x,n}}{\lambda_{i_x,n}} \right) - \psi_{i_x}(x) \right\| \end{aligned} \quad (45)$$

Par construction, le reste  $\psi_{i_x}$  tend vers zéro lorsque  $x$  est donné dans  $\mathcal{C}_{i_x}$ . La convergence de la somme des restes  $\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)$  vers 0 en découle, cette somme pouvant elle-même être considérée comme une décomposition dyadique.

**Propriété 1.1.** *Pour tout champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x)$  à support compact, borné dans  $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , et tout entier naturel  $n$  :*

$$E \left( 2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) - 1 < 2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < E \left( 2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) + 1 \quad (46)$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2^n} E \left( 2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) - \frac{1}{2^n} < \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{2^n} E \left( 2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) + \frac{1}{2^n} \quad (47)$$

On en déduit alors, grâce aux propriétés d'invariance par changement d'échelle que, pour toute échelle  $\lambda$ , et tout cœur  $x_0$  :

$$\frac{1}{2^n} E \left( 2^n \left\| \frac{1}{\lambda_{i,n}} v \left( \frac{\cdot - x_0}{\lambda_{i,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) - \frac{1}{2^n} < \left\| \frac{1}{\lambda_{i,n}} v \left( \frac{\cdot - x_0}{\lambda_{i,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{2^n} E \left( 2^n \left\| \frac{1}{\lambda_{i,n}} v \left( \frac{\cdot - x_0}{\lambda_{i,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) + \frac{1}{2^n} \quad (48)$$

*Remarque 1.1.*

**Sur une idée de Jean-Yves Chemin :**

Pourrait-on, à partir d'un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ , borné, à support compact, construire « à la main », une donnée initiale générant une solution globale ?

A cet effet, considérons un tel champ  $v$ , borné dans  $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ , à support compact contenu dans la boule  $\mathcal{B}(O, r)$  de centre  $O$ , de rayon  $r > 0$ .

Compte tenu de l'identité :

$$\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \quad (49)$$

et des propriétés d'invariance par changement d'échelle et translations, on a, pour tout entier naturel  $n$ , et tout cœur  $x_n$  de l'espace  $\mathbb{R}^d$  :

$$\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{1}{2^n} v \left( \frac{\cdot - x_n}{2^n} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \quad (50)$$

où on désigne par  $v \left( \frac{\cdot - x_n}{2^n} \right)$  le champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v \left( \frac{x - x_n}{2^n} \right)$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , et tout cœur  $x_n \in \mathbb{R}^d$  :

$$\left\| \frac{x - x_n}{2^n} \right\| < r \Leftrightarrow \|x - x_n\| < 2^n r \quad (51)$$

Il est donc naturel de considérer un recouvrement de l'espace par des couronnes  $\mathcal{C}_n$ , de centre  $O$ , de rayon intérieur  $2^n r$ , et de rayon extérieur  $2^{n+1} r$ .

A chacune de ces couronnes, on associe le champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v_n(x) = \frac{1}{2^n} v \left( \frac{x - x_n}{2^n} \right)$ , où le cœur  $x_n$  appartient à la couronne  $\mathcal{C}_n$ .

Pour générer une solution globale, il ne faut pas qu'il y ait de sauts de discontinuité du champ de vecteurs donnée initiale lors du passage d'une couronne à l'autre.

Le problème peut être résolu par un procédé de lissage consistant à considérer, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , le champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v_\varepsilon(x) = \frac{1}{2^n r - \varepsilon} v \left( \frac{x - x_{n,\varepsilon}}{2^n r} \right)$ , où le cœur  $x_{n,\varepsilon}$  appartient à la frontière entre la couronne  $\mathcal{C}_n$  et la couronne  $\mathcal{C}_{n+1}$ .

**Remarque 1.2. Au sujet des profils**

Considérons un champ  $v$ , borné dans  $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ , à support compact contenu dans la boule  $\mathcal{B}(O, r)$  de centre  $O$ , de rayon  $r > 0$ .

Compte tenu des propriétés d'invariance par changement d'échelle et translations, on a, pour tout réel  $\lambda > 0$ , et tout cœur  $x_{\text{cœur}}$  de l'espace  $\mathbb{R}^d$  :

$$\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{1}{\lambda} v \left( \frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \quad (52)$$

où on désigne par  $v \left( \frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right)$  le champ de vecteurs  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v \left( \frac{x - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right)$ .

Le champ  $v$  étant à support compact contenu dans la boule  $\mathcal{B}(O, r)$ , pour que le champ  $v \left( \frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right)$  ne soit pas identiquement nul, il faut donc :

$$\left\| \frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right\| < r \Leftrightarrow \|x - x_{\text{cœur}}\| < \lambda r \quad (53)$$

ce qui signifie donc que  $x$  doit appartenir à la boule  $\mathcal{B}(x_{\text{cœur}}, \lambda r)$  de centre  $x_{\text{cœur}}$  et de rayon  $\lambda r$ .

Considérons, maintenant, deux échelles  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$ , et les coeurs associés  $x_i$  et  $x_j$ , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité soient vérifiées :

$$j \neq j' \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} + \frac{\lambda_{j'}}{\lambda_j} \right) = +\infty \\ \text{ou} \\ \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_j - x_{j'}|}{\lambda_j} = +\infty \end{cases} \quad (54)$$

Générer une solution globale à partir d'une famille de champs  $v \left( \frac{\cdot - x_i}{\lambda_i} \right)$ ,  $i \in I$ , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité ci-dessus soient vérifiées, revient donc à obtenir un recouvrement/pavage de l'espace  $\mathbb{R}^d$  par des boules  $\mathcal{B}_i$  telles que :

- i. deux boules voisines (ou « proches ») seront telles que le rayon de la première sera soit très grand, soit très petit par rapport à celui de la seconde ;



- ii. deux boules éloignées auront des rayons équivalents.

On tombe finalement sur un problème de géométrie - qui ressemble fortement aux cercles de Descartes : Bien sûr, il s'agit ici d'une représentation bidimensionnelle. La généralisation à l'espace de dimension 3 existe, il s'agit des sphères d'Apollonius [2]. Le recouvrement d'une boule de l'espace, donnée, par ces sphères, est donc fractal.

Pour générer une solution globale, il ne faut pas qu'il y ait de sauts de discontinuité du champ de vecteurs donnée initiale lors du passage d'une boule à l'autre.

Le problème peut être résolu par un procédé de lissage (A PRÉCISER).

